



TITLE:

多くの多重可移Suborbitをもつ原始置換群について (有限群論)

AUTHOR(S):

沼田, 稔

CITATION:

沼田, 稔. 多くの多重可移Suborbitをもつ原始置換群について (有限群論). 数理解析研究所講究録 1976, 277: 7-10

ISSUE DATE:

1976-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/106012>

RIGHT:

多くの多重可移 suborbit をもつ原始置換群 について

阪大 理学部 沼田 稔

G は有限集合 Ω 上の原始置換群、 $\Omega \times \Omega$ 上自明でない G -orbit のすべてを $R_1, \dots, R_s, \Delta_1, \dots, \Delta_t$ と表わし、 Ω の点 α に対し $G_\alpha = \{g \in G \mid \alpha^g = \alpha\}$ が $R_i(\alpha) = \{\beta \in \Omega \mid (\alpha, \beta) \in R_i\}$, $(i=1, \dots, s)$ 上 2-trans で $\Delta_i(\alpha) = \{\beta \in \Omega \mid (\alpha, \beta) \in \Delta_i\}$ $(i=1, \dots, t)$ 上 2-trans でないとする時 s と t の関係はどうか? この問題について一般的には今まで何もわかっていなかった。

$t=0$ の時 G が Ω 上 3-trans または $|\Omega|=p, |G|=2p$ (p : odd prime) であることが簡単にわかる。

$t=1$ の時 Peter, J. Cameron は "Primitive groups with most suborbits doubly transitive" *Geometriae Dedicata* 1, (1973) に於て $s \leq 2$ であること特に $s=2$ の時 degree や subdegree, intersection number が一つの parameter で書き尽くされることを示した。

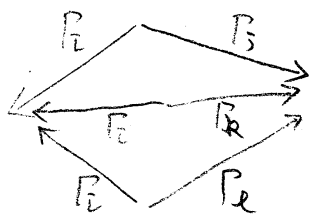
この P. J. Cameron の論文は、Cameron の次の Lemma と共に 一般に Δ が t のある関数で押えられるということを暗示している。

Lemma. G_α は $\Gamma_i^*(\alpha) = \{\beta \in \Omega \mid (\beta, \alpha) \in \Gamma_i\}$ 上 2-trans

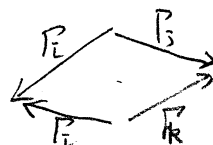
Lemma. $|\Gamma_i(\alpha)| > 3$ の時

$\Gamma_i \circ \Gamma_i^*(\alpha) = \{\beta \in \Omega \mid \Omega \text{ の元 } \gamma \text{ が存在し } (\alpha, \gamma) \in \Gamma_i, (\beta, \gamma) \in \Gamma_i\}$
 には G_α が 2-trans に作用しない G_α -orbit を含む
 (P. J. Cameron の Lemma は もっと特別な場合についてである) .

この予想を証明するため手始めに $t=2$ の時を考えこの時は $\Delta \leq 4$ になることがわかった。 $t=2$ の時の証明より 一般には $\Delta \leq 2t$ となると予想した。これを証明するためにはグラフ $(\Omega, \Gamma_i), (i=1, \dots, \Delta)$ の関係で 次の図が存在しないことが証明されればよいことがわかる。

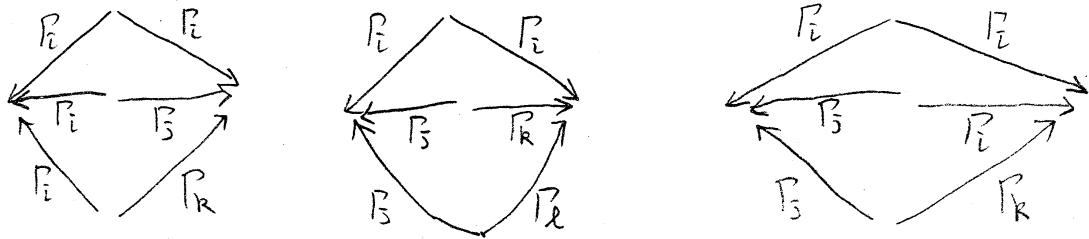


$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4 (*)$



上の図の非存在の証明には 図 が存在する条件を詳しく調べるが必要になった。

存在条件を詳しく調べる中でさらに次の類似の図もすべて存在しないことが証明された。



$R_i, R_j, R_k, R_l (\neq)$

これらのことから次の定理が導かれる。

定理1 $t > 1$, $|R_i(\alpha)|, |\Delta_j(\alpha)| > 3$ ($i=1, \dots, \Delta, j=1, \dots, t$)

の時 $\Delta \leq 2t - \gamma$

ただし $\gamma = \#\{\Delta_i \mid \Delta_i = R_j \circ R_j^*, j=1, \dots, t\}$

特に $\gamma=1$ の時は

$$\Delta \leq 2t - 2$$

定理の不等式はもっとよくなり $\Delta \leq t$ が成り立つのではないかと予想している。

定理1は一般論であり 個々の場合について はもっと多くのことが知られる 次の定理はその一つである。

定理2. $\gamma=t > 1$ の時 $t=\Delta=2$ であり

$G \cong J_1$ (small Janko simple group), $G_\alpha \cong \text{PSL}(2, 11)$ 。

証明方法は、permutation character に関する簡単な結果と、図を二通りに数えるという常套手段を使うだけである。

これから定理2のようになまくいくかわからないが、ある特別の場合について、その原始置換群を決定するという問題がおきてくる。 G_n が かなり多くの suborbit 上 2-trans に作用する原始置換群の存在をたしかめたり、その型をきめていくことは興味ある問題である。